

Prisfastsættelse af Cibor produkter

Cibor produkter

I de seneste år er der introduceret en række variabelt forrentede obligationer på det danske obligationsmarked. Fælles for mange af disse produkter er, at deres kupon afhænger af fixingen af enten 3 måneders eller 6 måneders Cibor. Obligationerne tilbydes både med og uden afdrag, og de fleste har kvartalsvise betalinger. Nogle produkter har indbygget et renteloft, nogle tillægger et spread til Cibor fixingen og andre multiplicere Ciborfixingen+spreadet med en faktor der skal tage højde for at kuponen fixes på pengemarkedet mens obligationen handles på obligationsmarkedet. Typisk er alle disse effekter i spil, men der findes også produkter der er rene variabelt forrentede obligationer. I dette notat sættes fokus på hvoledes disse typer af obligationer kan prisfastsættes uden brug af en sofistikeret rentestrukturmodel. Dette kræver dog et par simplificerende antagelser som vender tilbage til senere i artiklen.

I det efterfølgende vil først den finansielle definition af Cibor renten blive præsenteret, og de relevante betalingsstrømme der afhænger af denne rente vil blive diskuteret. Dernæst vil den teoretiske prisfastsættelse af en enkelt fremtidig betaling blive gennemgået. Obligationens samlede værdi er givet som summen af alle dens betalinger, og derfor er det kun nødvendigt at demonstrere hvordan værdien af en enkelt betaling bestemmes. I visse tilfælde er prisfastsættelsen ekstremt simpel, men i langt de fleste tilfælde kræves der kendskab til volatiliteten på forwardrenterne. Dette er emnet for det efterfølgende afsnit, der omhandler konveksitetsjusteringen. Med den generelle prisfastsættelse som udgangspunkt, vises dernæst hvorledes vi kan tage højde for mange af de forskelligheder der er knyttet til de enkelte produkter.

Eksemplet i det næste afsnit viser hvor forholdsvis simpelt det er at bestemme værdien af en enkelt betaling for, eksempelvis, RD's 30-årige Cibor6. Sidste afsnit konkluderer, og endelig er der i Appendix en række matematiske resultater der benyttes i notatet.

Betalingsstrømme

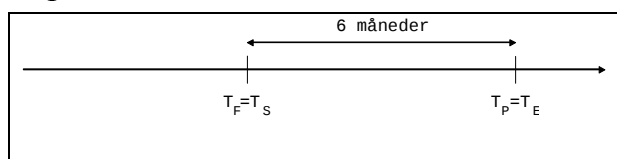
Vi vil fokusere på betalingsstrømme hvis rentebetaling bestemmes ud fra fremtidige Cibor fixinger. Cibor bliver som bekendt fastsat i interbank markedet på daglig basis, men i finansiell forstand har rente en entydig definition. Definitionen af en forward Cibor rente på tidspunkt t mellem de fremtidige tidspunkter T_S og T_E med $t < T_S < T_E$, er

$$F(t, T_S, T_E) = \frac{1}{\Delta_{S,E}} \frac{P(t, T_S) - P(t, T_E)}{P(t, T_E)} \quad (1)$$

hvor $P(t, T)$ er nul kuponprisen på tidspunkt t for nul kuponobligationen med udløb på tidspunkt T , og $\Delta_{S,E}$ er længden af fixingperioden målt i år. Dvs. afstanden mellem tidspunkterne T_S og T_E . Typisk er $\Delta_{S,E}$ lig 3 eller 6 måneder, men den eksakte beregning er afhængig af hvilken dagekonvention der anvendes. Det er standard at bruge konventionen for pengemarkedet som er ACT/360.

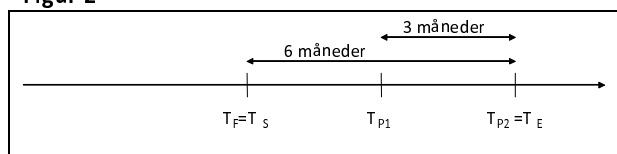
Vi vil undersøge tre forskellige betalingsprofiler. Den første er skitseret i figur 1, den anden er vist i figur 2 og den tredje er vist i figur 3. I figur 1 bestemmes renten på tidspunkt T_F over perioden $[T_S; T_E]$ og den udbetales på tidspunkt T_P . Set fra i dag er renten på tidspunkt T_S stokastisk. Der er ingen mellemliggende betalinger mellem tidspunkt T_S og T_E og $T_F = T_S$ og $T_P = T_E$, hvilket gør prisfastsættelsen væsentlig simplere.

Figur 1



Hvis der er mellemliggende betalinger kompliceres prisfastsættelsen en smule. I figur 2 bestemmes renten på tidspunkt T_F over perioden $[T_S; T_E]$, men i stedet for at rentebetalingen falder på tidspunkt $T_{P2}=T_E$ udbetales den på tidspunkt $T_{P1} < T_{P2}$.

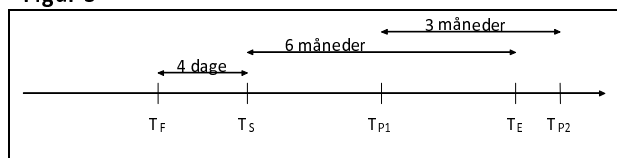
Figur 2



Det der komplicere prisfastsættelsen i figur 2 sammenlignet med figur 1 er, at den rentebetaling der forfalder på tidspunkt T_{P1} giver anledning til en geninvesteringsgevinst, der skal håndteres. Dermed bliver denne betalings værdi afhængig af diskonteringsrenten mellem tidspunkt T_{P1} og T_{P2} . Dette betyder, at værdien bliver afhængig af både den rente som fixer i T_S og den rente der gælder for perioden T_{P1} og T_E , og dermed bliver værdien afhængig af den fælles fordeling mellem de to renter.

Som det sidste tilfælde vil vi betragte den betalingsprofil, der er vist i figur 3. Situationen er, at rentefixingen sker på tidspunkt T_F over perioden $[T_S; T_E]$, men udbetales på tidspunkterne T_{P1} og T_{P2} . Dette er netop sådanne mange Cibor produkter er konstrueret. En betalingsprofil som vist i figur 3 kræver en smule mere arbejde, idet begge betalinger nu giver anledning til rentes-rente effekt og dermed en afhængighed af rentevolatiliteterne.

Figur 3



Teoretisk prisfastsættelse

I det følgende bestemmes værdierne af betalingerne i figurerne 1-3. Værdien af betalingen i figur 1 er nemt fundet, mens værdierne af betalinger i figur 2 og figur 3 kræver en model for at kunne bestemmes. Denne model vil blive udledt i dette afsnit, men det kræver følgende simplificerende antagelser:

1. Obligationen er inkonverterbar
2. Udviklingen i afdragsprofilen er kendt.
3. Fixingen sker på én dag direkte på Cibor rente.

Punkt 1 er nødvendig, da det ikke er muligt at bestemme værdien af den Bermuda option konverteringsretten består af uden at ty til en rentestrukturmodel. Dette er en kritisk antagelse, specielt for de Cibor produkter der er konverterbar til par. Af samme grund er Punkt 2 også nødvendig. Udviklingen i afdragsprofilen er stokastisk, da afdraget til de enkelte terminer bestemmes på baggrund af den kuponrente der afhænger af den stokastiske Cibor rente. Punkt 3 er medtaget fordi en række Cibor produkter benytter et gennemsnit af Cibor fixinger til at beregne kupon renten, og i sådanne tilfælde kan den følgende model ikke bruges. Denne antagelse er dog ikke kritisk.

Figur 1:

For at bestemme værdierne af betalingerne af de to typer, der er beskrevet i figurerne må vi ty til den nyere finansieringsteori. Den siger, at værdien i dag af en stokastisk betaling, der falder på tidspunkt T_p , $V(T_p)$, kan bestemmes som det forventede udfald af den stokastiske betaling multipliceret med den relevante nulkuponobligation. Dette kan skrives som

$$V(0) = P(0, T_p) E[V(T_p)] \quad (2)$$

Ovenstående formel (2) er dog for generel til at kunne benyttes. For at kunne beregne en forventede værdi skal vi kende fordelingen af den stokastiske betaling, og derfor må der lægges mere struktur på modellen. I den log-normale forward LIBOR model (LFM) antages det at dynamikken i forwardrenterne er givet som en geometrisk Brownsk bevægelse:

$$dF(t, T_s, T_E) = F(t, T_s, T_E) \sigma(T_s, T_E) dW(t) \quad (3)$$

hvor $\sigma(T_s, T_E)$ er den konstante volatilitet på den forwardrente der fixer i $T_f = T_s$ over periode $[T_s; T_E]$, og $W(t)$ er en Wiener proces. Bemærk at dynamikken i $F(t, T_s, T_E)$ ikke har nogen drift, hvilket betyder at $F(t, T_s, T_E)$ er en martingal¹, og vi har derfor for $t < s$

$$F(t, T_s, T_E) = E[F(s, T_s, T_E)] \quad (4)$$

Specielt har vi, at forventningen i dag til den forwardrente der fixer over perioden $[T_s; T_E]$ er givet som spot forwardrenten for perioden. Dette får vi brug for senere, dvs.

$$F(0, T_s, T_E) = E[F(s, T_s, T_E)] \quad (5)$$

I en fuld specificeret LFM model, findes en ligning (3) for dynamikken af alle 6 (eller 3, men ikke begge) måneders forwardrenter ud til, f.eks., 20 år. I en fuld specificeret libor market model er det derfor også nødvendigt at specificere en korrelationsstruktur mellem de enkelte forwardrenter. Dette er dog ikke nødvendigt her, idet vores antagelser betyder at vi kan prisfastsætte hver betaling for sig selv uafhængigt af de resterende forwardrenter.

Vi er nu i stand til at bestemme prisen på en betaling som beskrevet i figur 1. Vi antager en restgæld på 1, og derfor bliver rentebetaling på tidspunkt T_p , $V(T_p) = F(T_s, T_s, T_E)$. Dette indsættes i ligning (2) for at bestemme værdien i dag:

$$V(0) = P(0, T_p) E[F(T_s, T_s, T_E)] = P(0, T_p) F(0, T_s, T_E) \quad (6)$$

Det sidste lighedstegn gælder pga. ligning (5). Som det ses, er forventningsoperatoren erstattet med spot forwardrenten, og værdien af betalingen kan bestemmes alene ud fra dagens nulkuponrentekurve. Bemærk også, at for at bestemme værdien af betalingen i figur 1 er det ikke nødvendigt at have kendskab til volatiliteten af forwardrenterne.

For at ovenstående fungerer, er det vigtigt, at alle betalinger, der involverer forwardrenten over perioden T_s til T_E opgøres på og tilbagediskonteres fra tidspunkt T_E . Hvis rentebetalingen falder på et andet tidspunkt bliver det en smule mere besværligt, og volatiliteten på forwardrenterne bliver afgørende.

Figur 2:

¹ En stokastisk proces kaldes en martingal hvis den forventede værdi af processen er lig med processens nuværende værdi.

Alle betalinger skal opgøres på tidspunkt T_E (fordi da er $F(T_S, T_S, T_E)$ en martingale), og derfor skal betalingen der udbetales på tidspunkt T_{p1} fremdiskonteres til tidspunkt $T_E = T_{p2}$. Fremdiskonteringen skal oven i købet foretages under forventningsoperatoren, dvs. inden man beregner forventningen. Hvis vi definerer $\delta = \Delta_{p1, p2}$ til at være afstanden mellem T_{p1} og T_{p2} fås

$$\begin{aligned} V(0) &= P(0, T_E) E[F(T_S, T_S, T_E)(1 + \delta F(T_{p1}, T_{p1}, T_E))] \\ &= P(0, T_E) (E[F(T_S, T_S, T_E)] + \delta E[F(T_S, T_S, T_E)F(T_{p1}, T_{p1}, T_E)]) \end{aligned} \quad (7)$$

Problemet er, at vi ikke kender den fælles fordeling af $F(T_S, T_S, T_E)$ og $F(T_{p1}, T_{p1}, T_E)$. Vi antager derfor at $F(T_{p1}, T_{p1}, T_E) = \gamma F(T_S, T_S, T_E)$, hvor $\gamma = F(0, T_{p1}, T_E)/F(0, T_S, T_E)$. Udnyttes denne relation fås

$$\begin{aligned} V(0) &= P(0, T_E) (E[F(T_S, T_S, T_E)] + \delta \gamma E[F(T_S, T_S, T_E)^2]) \\ &= P(0, T_E) (F(0, T_S, T_E) + \delta \gamma E[F(T_S, T_S, T_E)^2]) \end{aligned} \quad (8)$$

Som det kan ses, får vi et ekstra led med i forhold til tilfældet i figur 1 (se ligning (6)). Dette ekstra led er det andet moment af forwardrenten, og dette led er derfor altid positivt. Den finansielle forklaring er, at noget af den betaling der falder på tidspunkt T_{p2} allerede udbetales på tidspunkt T_{p1} , hvilket giver anledning til en genplaceringsgevinst mellem tidspunkt T_{p1} og T_{p2} . Dette sidste led går under navnet konveksitetsjustering i den finansielle litteratur, og som kan ses, er det nødvendigt at kende volatiliteten på $F(T_S, T_S, T_E)$ for at kunne bestemme det andet moment af forwardrenten. Den konveksitetjusteret forwardrente er givet ved;

$$\tilde{F}(T_S, T_S, T_E) = F(0, T_S, T_E) + \delta \gamma E[F(T_S, T_S, T_E)^2] \quad (9)$$

For at kunne beregne værdien af konveksitetsjusteringen, skal vi kunne bestemme det andet moment af forwardrenten, og det kræver en model for renten. I Appendix er det vist hvordan det andet moment findes i den log-normale model, hvilket leder til følgende konveksitetsjustering²

$$E[F(T_S, T_S, T_E)^2] = F(0, T_S, T_E)^2 \exp(\sigma(T_S, T_E)^2 T_S) \quad (10)$$

Benyttes konveksitetsjusteringen fås altså at den samlede værdi af betalingsstrømmen i figur 2 er givet ved

$$V(0) = P(0, T_{p2}) F(0, T_S, T_E) + \delta \gamma P(0, T_{p2}) F(0, T_S, T_E)^2 \exp(\sigma(T_S, T_E)^2 T_S) \quad (11)$$

Figur 3:

I figur 3 er der en betaling både i T_{p1} og T_{p2} . Den betaling der udbetales i T_{p1} kan behandles som vist for figur 2. Derimod skal vi håndtere den betaling der falder i T_p på en lidt anden måde. Det faktum, at fixingen sker i T_F over perioden $[T_S; T_E]$ er ikke noget problem som vist i det følgende. Som ovenfor skal betalingen diskonteres fra dens reelle betalingsdato til T_E . Mens betalingen i figur 2 skulle fremdiskonteres, skal betalingen der udbetales i T_{p1} tilbagediskonteres til T_E . Analogt med ligning (7) skriver vi derfor

$$V(0) = P(0, T_E) E[F(T_F, T_S, T_E)(1 + \delta F(T_E, T_E, T_{p2}))^{-1}] \quad (12)$$

² Alternativt til ligning (10) kan vi udnytte følgende matematiske resultat såfremt der i markedet handler capletter for ethvert udløb T_E og strike K .

$$F(T_S, T_S, T_E)^2 = 2 \int_0^\infty (F(T_S, T_S, T_E) - K)^+ dK$$

hvilket fører til

$$E[F(T_S, T_S, T_E)^2] = 2 \int_0^\infty \frac{\Delta_{S,E}}{P(0, T_E)} \text{Cpl}^{\text{MKT}}(0, T_E, T_S, K) dK$$

Fordelen ved denne metode er at der tages højde for volatilitetssmilet i markedet.

hvor δ nu er afstanden målt i år mellem T_E og T_{P2} .

Problemet med dette udtryk er at operatoren $(\cdot)^{-1}$ indgår. Derfor laver vi approksimationen $(1+x)^{-1} \approx (1-x)$ for små x værdier. Benyttes denne approksimation i ligning (12) fås

$$V(0) = P(0, T_E) E[F(T_F, T_S, T_E)(1 - \delta F(T_E, T_E, T_{P2}))] \quad (13)$$

Som ovenfor antager vi at $F(T_E, T_E, T_{P2}) = \gamma F(T_F, T_S, T_E)$, med $\gamma = F(0, T_E, T_{P2}) / F(0, T_S, T_E)$, og ved at indsætte i ligning (13) fås

$$\begin{aligned} V(0) &= P(0, T_E) E[F(T_F, T_S, T_E)(1 - \delta \gamma F(T_F, T_S, T_E))] \\ &= P(0, T_E) (E[F(T_F, T_S, T_E)] - \delta \gamma E[F(T_F, T_S, T_E)^2]) \\ &= P(0, T_E) (F(0, T_S, T_E) - \delta \gamma E[F(T_F, T_S, T_E)^2]) \end{aligned} \quad (14)$$

Derfor er værdien af den sidste betaling i figur 3 givet ved

$$V(0) = P(0, T_E) F(0, T_S, T_E) - \delta \gamma P(0, T_E) F(0, T_S, T_E)^2 \exp(\sigma(T_S, T_E)^2 T_S) \quad (15)$$

Konklusion

Vi har i dette notat sat fokus på prisfastsættelsen af simple Cibor produkter, og demonstreret hvorledes de kan prisfastsættes ud fra dagen rentekurve og dagens volatilitetskurve. Et eksempel demonstrerede, hvor simpel metoden er at bruge.

Referencer

Hunt & Kennedy (2000) *Financial Derivatives in Theory and Practice*. John Wiley & Sons, Chichester.
 Pelsser (2001) *Mathematical Foundation of Convexity Correction*, kan downloades på adressen:
http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=267995

Appendiks

Lad X være en normalfordelt stokastisk variabel med middelværdi μ og varians Σ^2 , dvs.

$$X \sim N(\mu, \Sigma^2) \quad (A1)$$

Da vil middelværdien af $\exp(X)$ være givet ved

$$E[\exp(X)] = \exp(\mu + \frac{1}{2}\Sigma^2) \quad (A2)$$

Dynamikken i forwardrenterne er under det T_E -terminale sandsynlighedsmål givet ved:

$$dF(t, T_S, T_E) = F(t, T_S, T_E) \sigma(T_S, T_E) dW^E(t) \quad (A3)$$

Vi vil beregne den forventede værdi af $F(t, T_S, T_E)^2$, og derfor bruger vi Itô's lemma til at bestemme dynamikken af de kvadrede forwardrenter. Vi får:

$$dF(t, T_S, T_E)^2 = 2F(t, T_S, T_E) \sigma(T_S, T_E) dW^E(t) + F(t, T_S, T_E)^2 \sigma^2(T_S, T_E) dt \quad (A4)$$

Ud fra (A4) kan vi på et fremtidigt tidspunkt $s > t$ bestemme fordelingen af den stokastiske variabel $F(s, T_S, T_E)^2$, og vi har at $\ln(F(s, T_S, T_E)^2) \sim \text{Normal}(M, V^2)$, hvor $M = \ln(F(t, T_S, T_E)^2) - \sigma^2(T_S, T_E)(T_E - T_S)$ og $V^2 = 4\sigma^2(T_S, T_E)(T_E - T_S)$ dvs³:

$$F(s, T_S, T_E)^2 = F(t, T_S, T_E)^2 \exp\left(-\sigma^2(T_S, T_E)(s - t) + 2\sigma(W_s^U - W_t^U)\right) \quad (A5)$$

Nu kan ligning (A2) bruges til at bestemme $E[F(T_S, T_S, T_U)^2]$ under T_E -terminal målet og ved direkte at indsætte M og V^2 i ligning (A2) fås:

$$E_t[F(T_S, T_S, T_E)^2] = F(t, T_S, T_E)^2 \exp(\sigma^2(T_S, T_E)(T_S - t)) \quad (A6)$$

³ Fordelingen bestemmes ved at bruge Itô's lemma på $\ln(F(s, T_S, T_U)^2)$.