

Konverterbare Realkreditobligationer

Copenhagen Business School

Summer school

August 17, 2005

Niels Rom-Poulsen

Danske Markets, Quantitative Research

nrp@danskebank.dk

Oversigt

- Prepayment optionen
- Hvorfor ikke en almindelig option
- Realkreditmodeller
- Prepaymentmodeller: specification, estimation og nogle praktiske restriktioner
- Numeriske teknikker til prisfastsættelse af realkreditobligationer
 - Binomialtræ
 - Monte Carlo simulering

Prepayment optionen I

Embedded option i realkreditobligationer

- Låntager kan til enhver tid opsige lånet til pari
- Opsigelsesfrist på to måneder før terminen (nye serier)

Omkostninger ved at udnytte optionen

- Faste omkostninger på ca. 5000 DKK (tinglysning, lånesagsgebyr)
- Variable omkostninger ca. 0.25% (kurtage, kursskæring)
- Differencerente

Prepayment optionen II

- Amerikansk eller Bermudan option ?
 - Principelt amerikansk option, men opsigelse på termin, dvs. prepayment optionen er en option på en forward kontrakt
 - Altså ingen forskel idet forward kontrakter er ikke-dividende udbetalende aktiver. Det er altid optimalt at vente til opsigelsesfristens udløb

Prepayment optionen III

- Optionen i realkreditobligationen minder om Bermudan receiver swaption
- Exercise strategi: løbende sammenligne hold-on værdien af gælden med exercise værdien af gælden
- Rationel exercise - konvertering hvis exercise værdien er lavere end hold-on værdien (for gælden, modsat for selve optionen)
- Omkostninger betyder at exercise værdien er 100+omk.
- Når exercise strategien er fastlagt, kan obligationen prisfastsættes fra markedets synsvinkel

Prepayment optionen IV

Implikationer af Bermudan option tankegangen

- Teoretiske kurs på realkreditobligationen kan ikke overstige $100 + \text{"lille tillæg"}$ (forårsaget af konverteringsomkostninger)
- Alle med samme omkostningsprocent vil konvertere samtidigt
- I modstrid med observerede prisbevægelser

Hvorfor ikke en almindelig option

- Eller: hvad er der galt med "rationel exercise"ideen ?
 - Betydelig heterogenitet i omkostningerne ved konvertering, herunder skatteeffekter ved kontantlån
 - Uvilje mod stigning i den nominelle restgæld
 - Lang udstedelsesperiode

Realkreditmodeller I

- En realkreditmodel består af to modeller
 - Stokastisk rentestrukturmodel (Vasicek, BDT, HW), som er kalibreret til den aktuelle rente- og volatilitetskurve
 - Prepaymentmodel som giver prepayments = $F(\text{rentekurven, andre faktorer})$ - her kan gøres den store forskel

Realkreditmodeller II

- Nogle kriterier for valg af stokastisk rentestrukturmodel
 - Fleksibilitet mht. kalibrering til volatilitets grid (swaptions, caps), især smiles/skews for out-of-the-money optioner
 - Hastighed for kalibrering af modellen (closed-form udtryk for europæiske optioner)
 - Effektive numeriske metoder til prisfastsættelse af realkreditobligationer
 - Er der restriktioner på prepaymentmodellen? Stiafhængighed nemmeste med simulering

Prepaymentmodeller I - gevinstkravsmodeller

- Beregn konverteringsgevinst, g , under hensyntagen til refinansieringsalternativ, omk. og skat
- Gevinstkravet, μ , varierer stokastisk over låntagere i henhold til en given stokastisk fordeling
- På den måde undgår vi at alle indfrier på samme tid. Modellens estimat på prepaymentprocenten er givet ved $\lambda(P(t, T)) = \text{Prob}(\mu < g)$ betinget af kendte størrelser på tidspunkt t
- Eksempelvis lånestørrelse, lånets restløbetid samt burnout (giver stiafhængighed)
- Prepaymentmodel for forskellige trancher

Prepaymentmodeller II

- Ide med burnout: hvis der har været mange indfrielse, vil de tilbageværende låntagere være mindre tilbøjelige til at konvertere
- Nogle modeller checker at der ikke sker konverteringer under pari - svært i et Monte Carlo set-up

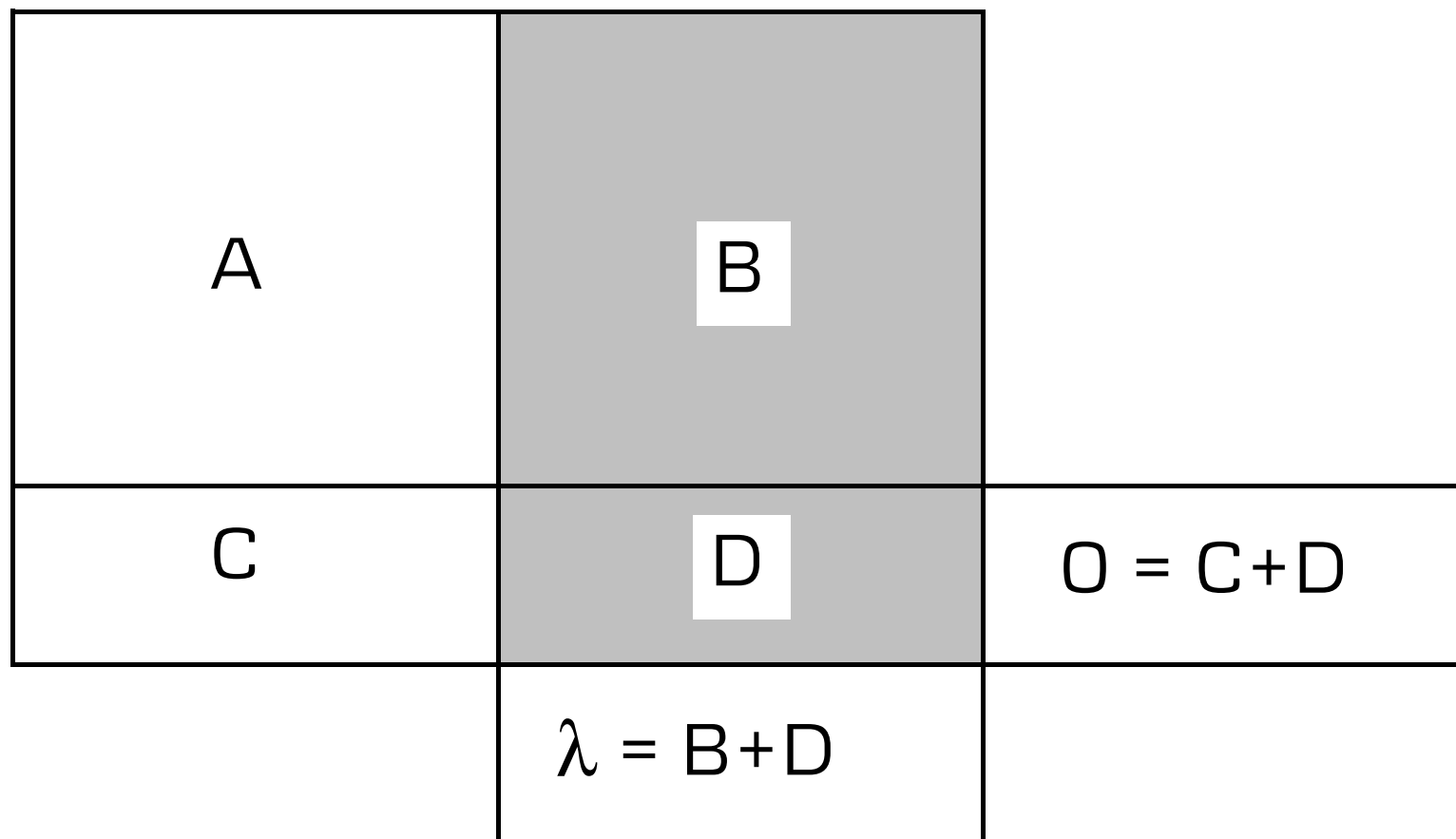
Skitse af en prepaymentmodel

- Gevinsten defineres som nutidsværdibesparelsen efter skat og omk.
- Kritisk element: refinansieringsrenten kendes ikke i fremtiden
- Løsning: brug fremtidig swaprente eller nk-rente + konstant
- Gevinstkrauet følger en given parametrisk fordeling, hvis parametre kan være bestemt af lånespecifikke størrelser samt evt. pool factors

Estimation af en prepaymentmodel

- Estimation ud fra historiske indfrielser
- Data begrænsning: kun data på serieniveau
- Mulig løsning er mixture estimation med
$$\lambda(\cdot) = \sum_{h=1}^H \omega_h \lambda_h(\cdot)$$
- Brug ændringer fra CK92 som approksimation af indfrielserne på gruppeniveau
- Hvad med risikopræmier for prepayment risk ? Vi estimerer under $\mathbb{P}$ men prisfastsætter under $\mathbb{Q}$

Lidt om CPR



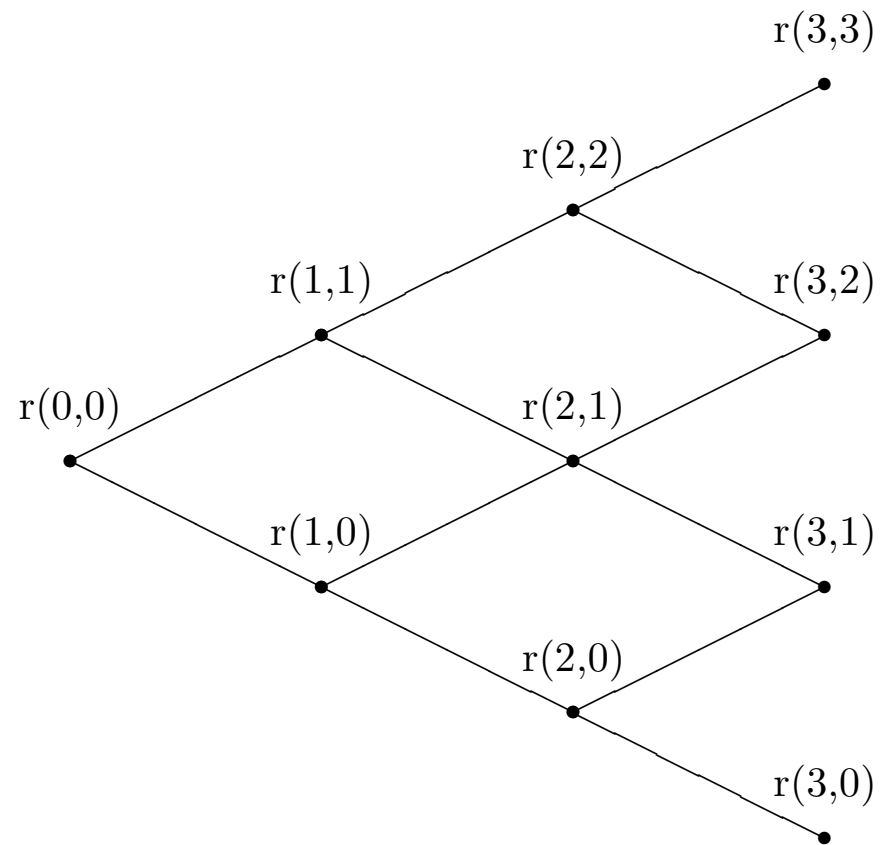
Generel prisfastsættelse af MBS

$$b_n = \underbrace{\prod_{j=1}^{n-1} (1 - \lambda_j)}_{\text{tilbageværende lån}} \underbrace{\left(\underbrace{\lambda_n H_n}_{\text{cpr i } n} + \underbrace{(1 - \lambda_n) O_n}_{\text{ordinær afdrag}} + \underbrace{i_n}_{\text{rentebetaling}} \right)}_{\text{samlet betaling fra MBS'en i } t_n}$$

$$P_0 = \sum_{n=1}^N PV(b_n)$$

$$PV(b_n) = \mathbb{E}_0^{\mathbb{Q}} \left[\exp \left(- \int_0^{t_n} r_s ds \right) b_n \right]$$

Binomial tree



Notation - trælsøsning

(n, s)	: Tilstand s på tidspunkt t_n
$\lambda(n, s)$	: CPR i tilstanden (n, s)
$b(n, s)$	: Betalingen fra aktivet i tilstanden (n, s)
$o(n)$	: Ordinær udtrækning på tidspunkt n
$i(n)$	: Rentebetaling på tidspunkt n
$P(n, s)$	: Prisen på konverterbar obligation i tilstanden (n, s)
$B^{gl}(n, s)$	: Værdien af det nuværende låns inkonverterbare betalingsrække i tilstanden (n, s)
$B^{ny}(n, s)$	: Værdien af et nyt låns inkonverterbare betalingsrække i tilstanden (n, s)

Vi skal beregne $P(0, 0)$

Prisfastsættelse af inkonverterbare obligationer

$b(n, s) = o(n) + i(n)$ uafhængig af tilstanden s

1: $P(N, s) = b(N, s), s = 0, \dots, N + 1$

2: **for** ($n = N - 1$ to 0) **do**

3: **for** ($s = 0$ to n) **do**

4: $P(n, s) = b(n, s) + \frac{1}{2} \frac{P(n+1, s+1) + P(n+1, s)}{1+r(n, s)}$

5: **end for**

6: **end for**

Prisfastsættelse af konverterbare obligationer

- optimal adfærd I

$$b(n, s) = \lambda(n, s)H(n) + (1 - \lambda(n, s))o(n) + i(n)$$

$$\lambda(n, s) = \begin{cases} 1 & \text{Hvis konvertering} \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$b(n, s) = \begin{cases} H(n) + i(n) & \text{Hvis konvertering} \\ o(n) + i(n) & \text{ellers} \end{cases}$$

Prisfastsættelse af konverterbare obligationer

- optimal adfærd II

```
1:  $P(N, s) = b(N, s), s = 0, \dots, N + 1$ 
2: for ( $n = N - 1$  to 0) do
3:   for ( $s = 0$  to  $n$ ) do
4:     if (Konvertering) then
5:        $P(n, s) = H(n) + i(n)$ 
6:     else
7:        $P(n, s) = o(n) + i(n) + \frac{1}{2} \frac{P(n+1, s+1) + P(n+1, s)}{1 + r(n, s)}$ 
8:     end if
9:   end for
10: end for
```

Prisfastsættelse af konverterbare obligationer

- optimal adfærd III

- Det er i beslutningen om konvertering, at konverteringsomkostningerne indgår
- Hvis samme konverteringsomkostninger $\Rightarrow$ alle konverterer på samme tid
- Konverteringsbeslutning: $B^{gl}(n, s) + omk. > B^{ny}(n, s)$, hvor $B(n, s)$ er værdien af det inkonverterbare cash flow

Prisfastsættelse af konverterbare obligationer

- heterogene debitorer I

$$b(n, s) = \lambda(n, s)H(n) + (1 - \lambda(n, s))o(n) + i(n)$$
$$\lambda(n, s) = f(r(n, s), x)$$

1: $P(N, s) = b(N, s), s = 0, \dots, N + 1$

2: **for** ($n = N - 1$ to 0) **do**

3: **for** ($s = 0$ to n) **do**

4: $P(n, s) = b(n, s) + (1 - \lambda(n, s)) \frac{1}{2} \frac{P(n+1, s+1) + P(n+1, s)}{1 + r(n, s)}$

5: **end for**

6: **end for**

Prisfastsættelse af konverterbare obligationer

- heterogene debitorer II

- x er parametre til konverteringsfunktionen såsom kuponrente, middel gevinstkrav m.m.
- Lad Φ være den kumulative normalfordeling ($\in [0, 1]$)
- $f(r(n, s), c, \epsilon, \beta) = \Phi \left(\frac{\frac{c}{r(n, s)} - \epsilon}{\beta} \right)$
- $f(r(n, s), \mu, \sigma) = \Phi \left(\frac{g(n, s) - \mu}{\sigma} \right)$, hvor $g(n, s)$ kunne være givet ved $1 - \frac{B^{ny}(n, s)}{B^{gl.}(n, s)}$
- $f(\cdot) = \Phi \left(\frac{(c-r)k \prod_{j=1}^{n-1} (1-\lambda_j) - \epsilon}{\beta} \right)$

Monte Carlo simulering

- Lad nu (n, s) betegne tidsindekset og den simulerede sti, $n = 1, \dots, N$
- Simuler den underliggende renteprocess fremad i tiden
- Opdater variable undervejs, diskonteringsfaktorer , poolfaktoren m.m.
- På baggrund heraf beregnes $\lambda(n, s)$ og dermed $b(n, s)$
- Beregn summen af de diskonterede betalinger
- Prisen er nu givet som gennemsnittet heraf
- Monte Carlo simulering resulterer i et statistisk estimat på prisen, og som sådant er det usikkert

Simulering af rentestier i Vasicek modellen I

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma dW(t)$$

$$r(t) = e^{-\alpha(t-u)}r(u) + b\left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right) + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s)$$

$$\mathbb{E}_u^{\mathbb{Q}}[r(t)] = e^{-\alpha(t-u)}r(u) + b\left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right)$$

$$\text{Var}_u^{\mathbb{Q}}[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} \left(1 - e^{-2\alpha(t-u)}\right) \equiv \sigma_r^2(t_i, t_{i+1})$$

$$r(t) = e^{-\alpha(t-u)}r(u) + b\left(1 - e^{-\alpha(t-u)}\right) + \sigma_r(u, t)Z_1(t)$$

hvor $Z_1(t)$ er en standard normalfordelt s.v.

Simulering af rentestier i Vasicek modellen II

- Denne diskretisering er eksakt i den forstand, at fordelingen af r_t betinget af r_u har samme fordeling som løsningen til SDE'en
- Kan også beregne eksakte diskonteringsfaktorer i Gaussiske modeller (se nedenfor)
- Hvis aktivets betalinger kun afhænger af størrelser på $t_0, t_1, \dots, t_N$ sker der ingen diskretiseringsfejl overhovedet

Samtidig simulering af diskonteringsfaktorer i Vasicek modellen

$$Y(t) \equiv \int_0^t r_s ds \Rightarrow D(t) \equiv e^{-Y(t)}$$

$$Y(t_{i+1}) = Y(t_i) + \mu_Y(t_i, t_{i+1}) + \sigma_Y(t_i, t_{i+1}) \cdot$$

$$[\rho_{rY}(t_i, t_{i+1})Z_1(i+1) + \sqrt{1 - \rho_{rY}^2(t_i, t_{i+1})}Z_2(i+1)]$$

$$\mu_Y = b(t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha(t_{i+1} - t_i)})(r(t_i) - b)$$

$$\sigma_Y^2(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}((t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(t_{i+1} - t_i)}) + \frac{2}{\alpha}(e^{-\alpha(t_{i+1} - t_i)} - 1))$$

$$\sigma_{rY}(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}[1 + e^{-2\alpha(t_{i+1} - t_i)} - 2e^{-\alpha(t_{i+1} - t_i)}]$$

Monte Carlo Simulation

```
1: Sæt  $PV = 0$ ,  $SS = 0$ 
2: for  $s = 1$  to  $S$  do
3:   Sæt  $PV(s)=0$ 
4:   for  $i = 0$  to  $N - 1$  do
5:     Simulate  $(Z_1(i + 1), Z_2(i + 1))$  ,  $Z_1, Z_2 \sim N(0, 1)$  uafh.
6:     Beregn  $r(i + 1, s)$ ,  $Y(i + 1, s)$ ,  $D(i + 1, s)$ ,
        $b(i + 1, s) = f(\cdot)$ 
7:      $PV(s) = PV(s) + b(i + 1, s)D(i + 1, s)$ 
8:   end for
9:    $PV = PV + PV(s)$ 
10:   $SS = PV(s)^2$ 
11: end for
12:  $P_{MBS} = \frac{PV}{S}$ ,  $\sigma_{MBS}^2 = \frac{1}{S}SS - P_{MBS}^2$ 
```